Dodatna nastava iz matematike

Nestandardne nejednakosti

Predavač: A.Pejčev

1. Neka su $x_1, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi takvi da im je suma ne manja od S ($S > 0$), a suma kvadrata im je jednaka n. Ako je $0 \leq \lambda \leq 1$, dokazati da je barem $\lceil \frac{S^2(1-\lambda)^2}{n} \rceil$ ovih brojeva veće od $\frac{\lambda S}{n}$.

2. Naći sve realne polinome oblika $x^4 - a_3x^3 + 6x^2 - 4x + a_0$ kojima su svi koreni nenegativni realni brojevi.

3. Neka je $n > 1$ prirodan broj i $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ pozitivni realni brojevi. Dokazati da je
$$\Big(\sum_{i \neq j} a_ib_j\Big)^2 \geq \Big(\sum_{i \neq j} a_ia_j) \cdot (\sum_{i \neq j} b_ib_j\Big).$$

4. Neka su $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n), (z_1, \ldots, z_n)$ tri n-torke pozitivnih realnih brojeva takvih da je $x_iy_i > z_i^2$ za svako $1 \leq i \leq n$. Pokazati nejednakost
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_iy_i - z_i^2} \geq \frac{n^3}{\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^n y_i\Big) - \Big(\sum_{i=1}^n z_i\Big)^2}.$$

5. Dokazati da ako je $x, y, z, a, b, c > 0$, onda je $\frac{x^4}{a^3} + \frac{y^4}{b^3} + \frac{z^4}{c^3} \geq \frac{(x+y+z)^4}{(a+b+c)^3}$.

6. Dokazati da ako je $a, b, c, d > 0$ i $(a^2 + b^2)^3 = c^2 + d^2$, onda je $\frac{a^3}{c} + \frac{b^3}{d} \geq 1$.

7. Neka je $p, q, r > 0$. Dokazati nejednakost $(p^5 - p^2 + 3) \cdot (q^5 - q^2 + 3) \cdot (r^5 - r^2 + 3) \geq (p + q + r)^3$.

8. Da se nadje najveća vrednost sume $S = a_1(1 - a_2) + a_2(1 - a_3) + \ldots + a_n(1 - a_1)$, gde je $\frac{1}{2} \leq a_i \leq 1, i = 1, 2, \ldots, n$.

9. Neka je $n \geq 2$ i $0 \leq x_i \leq 1$ za svako $i = 1, 2, \ldots, n$. Da se dokaže da je na snazi nejednakost $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - (x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1) \leq [\frac{n}{2}]$.

10. Da se dokaže da ako su a, b, c brojevi sa intervala [0,1], onda je
$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

11. Ako je $1 \leq x_k \leq 2$,$k = 1, 2, \ldots, n$, dokazati da je $(\sum_{k=1}^n x_k)(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k})^2 \leq n^3$.

12. Da se dokaže da ako je $0 < a < b$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$, onda je
$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab}n^2.$$

13. Neka su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ unutrašnji uglovi konveksnog n-tougla. Dokazati da je
$$\sin\frac{\alpha_1}{2} + \ldots + \sin\frac{\alpha_n}{2} \leq n \sin\frac{(n-2)\pi}{2n}.$$

14. Ako je $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 1$,da se dokaže da je $\frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}}$.

15. Za proizvoljne pozitivne realne brojeve $x_1, \ldots, x_n$ dokazati nejednakost
$$(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) \geq (1 + \sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n})^n.$$

16. Odrediti najveće C_n da za svakih n realnih brojeva $x_1, \ldots, x_n$ važi

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geq C_n(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n).$$

17. Neka su $x_1, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi. Dokazati da je:

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_n^2} + \ldots \frac{x_n}{1+x_1^2+\ldots+x_n^2} <\sqrt{n}.$$

18. Neka su $x_i \in R$, $\sum_{i=1}^n x_i^3 = 0$ i $x_i \geq -1$ za $i = 1, 2, \ldots, n$. Dokazati da je

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{n}{3}.$$

19. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ različiti prirodni brojevi tako da su svih 2^k suma $\sum_{i=1}^k e_i a_i$, $e_i \in \{0, 1\}$ različite.

   (a) Dokazati da je
   $$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_k} \leq 2(1 - 2^{-k});$$

   (b) Naći sve nizove $(a_1, \ldots, a_n)$ za koje važi jednakost.

20. Naći najveće realno A tako da se nejednakost

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} > A$$

daje tačnom za sve pozitivne realne brojeve x, y, z.

21. Ako za članove niza $a_1, \ldots, a_{2n+1}$ važi $a_i \leq \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{2}$ za $i = 2, 3, \ldots, 2n$. Dokazati da je

$$\frac{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}}{n+1} \geq \frac{a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}}{n}.$$

22. Neka su a, b, c nenegativni realni brojevi takvi da je $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Pokazati da je

$$0 \leq ab + bc + ca - abc \leq 2.$$